**Concursul Interjudeţean de Matematică "Cristian S. Calude"**
**Proba pe echipe, clasele IX-XII**
**25 noiembrie 2012**

**Soluţii**

**RUNDA a II-a**

**Problema 1.** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $16\cdot\{x\}^2-8\cdot x+1=0,$ unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real $x$.

**Soluţie:**

$$x=\frac{1}{8}\cdot\left(1+16\cdot\{x\}^2\right)\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{8};\frac{17}{8}\right)\Rightarrow[x]\in\{0;1;2\}.$$

$$a).[x]=0\Rightarrow\{x\}=x\Rightarrow 16x^2-8x+1=0\Rightarrow x=\frac{1}{4}.$$

$$b).[x]=1\Rightarrow x=1+\{x\}\Rightarrow 16\{x\}^2-8\{x\}-7=0\Rightarrow\{x\}=\frac{1+2\sqrt{2}}{4}\Rightarrow x=\frac{5+2\sqrt{2}}{4}.$$

$$c).[x]=2\Rightarrow x=2+\{x\}\Rightarrow 16\{x\}^2-8\{x\}-15=0\Rightarrow\{x\}=\frac{4\pm 16}{16}\notin[0;1).$$

**Răspuns:** $x\in\left\{\frac{1}{4};\frac{5+2\sqrt{2}}{4}\right\}.$

**Problema2.** Fie ecuaţia $3x^2-2m\cdot x+m^2+m-2=0.$ Să se determine valorile parametrului real m pentru care ecuaţia admite cel puţin o soluţie întreagă.

**Soluţie:** Considerăm ecuaţia în necunoscuta $m$:

$$m^2+(1-2x)\cdot m+3x^2-2=0.$$

$$m\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta\geq 0\Leftrightarrow -8x^2-4x+9\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[\frac{-1-\sqrt{19}}{4};\frac{-1+\sqrt{19}}{4}\right].$$

Ecuaţia admite o soluţie întreagă

$$x_0\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_0\in\{-1;0\}.$$

Pentru $x_0=-1\Rightarrow m^2+3m+1=0\Rightarrow m_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};$

Pentru $x_0=0\Rightarrow m^2+m-2=0\Rightarrow m_1=-2,\ m_2=1.$

**Răspuns:** $m\in\left\{\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2};-2;\ 1\right\}.$

**Problema 3.** Fie M mulţimea tuturor matricelor de tipul $(\mathrm{m},\mathrm{n}),m,n\geq 2,$ în care toate elementele sunt 1 sau $-1$ , astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie şi din fiecare coloană să fie $-1.$ Să se calculeze numărul elementelor mulţimii M.

**Soluţie:** Fie $A \in M(\{-1;1\})$ cu proprietatea cerută. $A=(a_{ij})$, $A'$ este matricea obţinută din matricea A prin eliminarea a n-a linie şi a n-a coloană. Notăm cu $L_1, L_2, ..., L_{n-1}$ produsul elementelor liniilor din matricea $A'$, cu $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$ produsul elementelor coloanelor din $A'$.

Avem; $a_{1n}=-L_1, a_{2n}=-L_2, ..., a_{m-1,n}=-L_{m-1}$ şi $a_{m1}=-C_1, a_{m2}=-C_2, ..., a_{m,n-1}=-C_{n-1}$

Pentru

$a_{mn}$ *avem* $a_{mn}=-a_{1n}\cdot a_{2n}\cdot ...\cdot a_{m-1,n}=(-1)^m\cdot L_1\cdot L_2\cdot ...\cdot L_{m-1}$

$a_{mn}=-a_{m1}\cdot a_{m2}\cdot ...\cdot a_{m,n-1}=(-1)^n\cdot C_1\cdot C_2\cdot ...\cdot C_{n-1};\quad (1)$

Dar $L_1\cdot L_2\cdot ...\cdot L_{m-1}=C_1\cdot C_2\cdot ...\cdot C_{n-1}\Rightarrow (-1)^m=(-1)^n\Rightarrow m,n$ *au aceeaşi paritate.*

Pentru matricea $A'$ avem $2^{(m-1)\cdot(n-1)}$ posibilităţi, iar pentru matricea A se completează prin condiţiile (1).

**Răspuns:** m şi n au aceeaşi paritate; $card\ M=2^{(m-1)\cdot(n-1)}$, iar pentru m şi n cu parităţi diferite $card$ M=0

**Problema 4**. Se dă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1>0$ şi $a_{n+1}=arctg(a_n), n\geq 1$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\cdot a_n\right)$.

**Soluţie:** Pentru x>0, avem $arctgx<x\Rightarrow a_{n+1}<a_n$. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi mărginit, deci convergent, iar $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot a_n^2\right)$. Aplicăm Stolz-Cesaro pentru cazul exceptat $\frac{0}{0}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2\cdot a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2\cdot arctg^2a_n}{a_n^2-arctg^2a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n^4\cdot\frac{arctg^2a_n}{a_n^2}\cdot\frac{1}{a_n^2-arctg^2a_n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^4}{(a_n-arctga_n)(a_n+arctga_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{(a_n-arctga_n)\left(1+\frac{arctga_n}{a_n}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{(a_n-arctga_n)}=\frac{3}{2};$$

*Aplicând* L´Hospital, obţinem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{(x-arctgx)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=3.$

Aşadar, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\cdot a_n\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}.$

**Răspuns:** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\cdot a_n\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}$